ECOLE NAVALE

Concours 1976

Première composition de mathématiques

(Epreuve aberrante, reproduite seulement à titre d'information)

On envisage l'équation différentielle linéaire

$$(1) \qquad a(x)\frac{d^2y}{dx^2} + b(x)\frac{dy}{dx} + c(x)\,y = 0$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions données, continues, non identiquement nulles, de la variable réelle x.

On sait que l'espace vectoriel des solutions de (1), est de dimension 2.

A l'opérateur $\frac{d}{dx}$, on associe la matrice

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

où, a priori, α, β, γ et δ sont des fonctions de x.

Déterminer la matrice N associée à l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$ on explicitera N en fonction de M et de la dérivée de cette matrice par rapport à x.

Donner alors l'équation matricielle qui représente l'équation (1).

PARTIE I

On suppose que α, β, γ et δ sont des constantes; indiquer les relations auxquelles doivent satisfaire les fonctions a, b et c pour qu'il en soit ainsi. Examiner les divers cas possibles.

Application. On considère l'équation différentielle linéaire :

$$(2) \qquad (x^2 + x + 1)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x^2 + 1)\frac{dy}{dx} - 2(2x + 1)\,y = 0,$$

vérifier que l'on peut donner à α, β, γ et δ des valeurs constantes; montrer que l'on peut alors obtenir une solution particulière $y_1(x)$ de l'équation (2), et préciser sa forme.

Posant ensuite

$$y(x) = y_1(x)\,z(x),$$

déterminer $z(x)$; en déduire la solution générale de l'équation (2).

PARTIE II

On suppose maintenant que α, β et δ ne sont plus des constantes, et que γ est identiquement nulle. Former les équations différentielles que doivent satisfaire, dans cette situation, les fonctions α, β et δ. On remarquera que les équations différentielles que satisfont α et δ sont identiques, et de la forme :

$$(3) \qquad a\frac{dv}{dx} + av^2 + bv + c = 0.$$

.../...

Deux situations peuvent alors se présenter :

a. On sait intégrer l'équation (1), on peut alors déterminer une solution particulière $w_1(x)$ de l'équation (3).

Posant ensuite

$$w = w_1 + u,$$

indiquer l'équation que satisfait u. En posant

$$\frac{1}{u^2} = v, \quad (\text{en fait: } \frac{1}{u} = v)$$

on obtient une équation différentielle du premier ordre en v; former cette équation. L'intégrer, et donner la solution générale de l'équation (3).

b. On ne connaît pas de solution de (1), mais on peut trouver une solution particulière évidente de (3); soit $w_1(x)$, cette solution. Posant à nouveau

$$w = w_1 + u,$$

on peut, dans certains cas, déterminer la solution générale w de (3). Il est alors possible de déterminer une solution particulière $y_1(x)$ de l'équation (1). Posant, dans cette équation

$$y(x) = y_1(x) \cdot z(x),$$

donner l'équation différentielle que satisfait $z(x)$; posant dans cette dernière

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x),$$

établir l'équation que satisfait $\varphi(x)$. Si on sait déterminer $z(x)$, on aura donc la solution générale de l'équation (1).

Applications.

1° On considère l'équation différentielle linéaire où $x \in \mathbb{R}^*+$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = 0; \tag{4}$$

En effectuant le changement de variable $x = e^t$, trouver l'équation différentielle que satisfait $y(t)$; intégrer cette relation, et en déduire la solution générale de (4).

Ecrire l'équation du type (3) associée à (4); donner une solution particulière w_1. Posant alors

$$w = w_1 + u,$$

indiquer l'équation à laquelle satisfait u ainsi que sa dérivée première; intégrer cette équation, en déduire la solution générale de l'équation différentielle du type (3) associée à (4).

2° On donne l'équation

$$(x - 1) \frac{dw}{dx} + (x - 1) w^2 + (1 - 2x) w + x = 0; \tag{5}$$

déterminer une solution particulière simple w_1 de cette équation; posant alors

$$w = w_1 + u,$$

indiquer la solution générale de l'équation (5).

Ecrire l'équation différentielle linéaire en y, du second ordre, du type (1), à laquelle est associée l'équation (5); cette équation en y sera notée équation (6). En utilisant l'expression de w obtenue ci-dessus, déterminer une solution particulière $y_1(x)$ de (6).

On pose ensuite

$$y(x) = y_1(x)\, z(x).$$

donner l'équation différentielle à laquelle satisfait z et ses deux premières dérivées; intégrer cette relation en effectuant le changement de fonction inconnue $\frac{dz}{dx} = \varphi(x)$; en déduire la solution générale de l'équation (6).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail